Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Abril - Julio 2008

Nombre: ______________________________

Carnet: ________________ Sección: _____

MA-1123 DE HONOR— Segundo parcial , 2008 —

Cada ejercicio vale 10 puntos. Justifique sus afirmaciones.
Debe resolver cuatro, cualesquiera de los 8 ejercicios.

1. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Calcule su polinomio característico
   b) Encuentre sus autovalores y autovectores
   c) ¿Cuál es el polinomio minimal de A?
   d) ¿Es A diagonalizable?

2. Sea S una matriz antisimétrica $(S^* = -S)$.

   a) Demuestre que $I \pm S$ es inversible.
   b) Demuestre que $(I + S)(I - S)^{-1}$ es unitaria.

3. Considere la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ $Q(x) = 2(\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3)$ y la cuádrica C de ecuación $Q(x) = 1$.
   ¿Será verdad que las coordenadas ξ_1, ξ_2, ξ_3 de los puntos de C no pasan valor absoluto de algún número fijo $k > 0$?
   Sugerencia: Encuentre un sistema de coordenadas donde la descripción de C sea simple.

4. Sean

$$\begin{aligned} x &= (1,\, 2,\, 0,\, 0) \\ y &= (0,\, 1,\, 1,\, 1) \end{aligned}$$

   vectores de R^4. Considere además el punto $w = (0,\, 1,\, 0,\, 2)$. Finalmente llame S al subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por x e y.

   a) Explique si $w \in S$.
   b) Encuentre un punto $z \in S$ que se halle a distancia mínima de w entre todos los puntos de S.
   c) ¿Cuántos tales $z \in S$ se pueden encontrar?

5. Sea $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ la función dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Encontrar N nilpotente y D diagonalizable tales que $A = D + N$ y $DN = ND.$

6. Sea $f : E \longrightarrow E$ tal que f conmuta con todas las $g : E \longrightarrow E$ diagonalizables entonces f es una homotecia.

7. Sea E un espacio con producto interno. Demuestre que $f : E \longrightarrow E$ es simétrica si y sólo si $< fx, x >$ es real para cada $x \in E$

8. Sea S el subespacio afin

$$S = \{\xi \,/\, \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = 2\} \quad \text{de} \quad \mathbb{R}^3.$$

   a) Encuentre una ecuación paramétrica para la recta R que pasa por el origen y es perpendicular a $S.$ (Cada vector de la recta es perpendicular a cada vector paralelo a S).

   b) Encuentre un punto P en S tal que

$$d(\mathbb{O}, P) \leq d(\mathbb{O}, Q) \quad \text{para cada} \quad Q \in S$$